<u>Contrôle.</u>

<u>Exercice 1.</u>

Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;\pi]$ par $f(x)=\cos^2(x)-2\sin(x)$.
En déduire le minimum de f.

<u>Exercice 2.</u>

On considère la fonction f définie sur $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}}{3x-4}$.

1) Etudier les variations de f.
2) La courbe représentative de f admet-elle une tangente de coefficient directeur 1 ?

<u>Exercice 3. (rapide)</u>

Etudier les variations de la fonction f définie sur IR par $f(x)=\dfrac{12}{5}x^5-4x^3$.

<u>Exercice 4.</u>

On considère la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Etudier les variations de f.

<u>Bonus :</u> Dériver la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{3x+1}\cos(2x-4)$ sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

Correction.

Exercice 1.

Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont dérivables sur $[0;\pi]$. Par opérations sur ces fonctions, on peut affirmer que f est dérivable sur $[0;\pi]$.

On a
$f'(x) = 2\cos(x)\times(-\sin(x)) - 2\cos(x) = -2\cos(x)\sin(x) - 2\cos(x) = -2\cos(x)(\sin(x)+1)$

Rappel : $(u^2)' = 2u\times u'$

Etude du signe de $f'(x)$:
On sait (ou d'après le cercle trigonométrique) que pour tout réel x de $[0\,;\pi]$ $\sin(x)\geq 0$.
On en déduit que $\sin(x)+1\geq 1$ et donc que $\sin(x)+1$ est positif.
$f'(x)$ est donc du même signe que $-2\cos(x)$, c'est-à-dire du signe opposé à celui de $\cos(x)$.
On en déduit le tableau suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		-	0	+	
f	1	↘	-2	↗	1

Conclusion : La fonction f admet donc -2 pour minimum, il est atteint pour $x=0$.

Exercice 2.

1. f est le quotient de deux fonctions polynômes donc f est dérivable sur son ensemble de définition.

$$f'(x) = \frac{\left(2x-\frac{3}{2}\right)(3x-4) - 3\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}\right)}{(3x-4)^2} = \frac{6x^2-8x-\frac{9}{2}x+6-3x^2+\frac{9}{2}x-2}{(3x-4)^2}$$

$$= \frac{3x^2-8x+4}{(3x-4)^2}$$

Etude du signe de $f'(x)$:
$f'(x)$ est du même signe que $3x^2-8x+4$ qui est un polynôme du second degré.
On trouve $\Delta = 16$ donc ce polynôme a deux racines : $\alpha = \frac{8-\sqrt{16}}{2\times 3} = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{8+\sqrt{16}}{2\times 3} = 2$
Le coefficient dominant est positif donc ce polynôme est positif sauf entre ses racines.

x	$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		↘	$\frac{5}{6}$	↗	

2. La courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur 1 au point d'abscisse x ssi $f'(x)=1$ c'est-à-dire $\dfrac{3x^2-8x+4}{(3x-4)^2}=1$.

Rappel : le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x est $f'(x)$.

Comme $(3x-4)^2 \neq 0$ sur $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$, cette équation équivaut à $3x^2-8x+4=(3x-4)^2$ ou encore à $3x^2-8x+4=9x^2-24x+16$ c-à-d : $-6x^2+16x-12=0$.

Cette équation du second degré a un discriminant négatif (-32) donc elle n'a pas de solution.
La courbe représentative de f n'admet donc pas de tangente de coefficient directeur 1.

Exercice 3.

f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR.

$$f'(x)=\frac{12}{5}\times 5x^4-4\times 3x^2=12x^4-12x^2=12x^2(x^2-1)$$

Etude du signe de $f'(x)$:

x^2-1 est un polynôme du second degré qui admet 1 et -1 comme racines [voir, par exemple, que $x^2-1=(x-1)(x+1)$]. Il est positif sauf entre ses racines d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2		+		+	0	+		+	
x^2-1		+	0	-		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
f		↗		↘		↘		↗	

Exercice 4.

On considère la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc f est dérivable sur son ensemble de définition.

$$f'(x)=\frac{\cos(x)\times\cos(x)-\sin(x)\times(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Comme $f'(x)>0$ alors f est croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Bonus : $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}\cos(2x-4)-2\sqrt{3x+1}\sin(2x-4)$