

NOM :

Contrôle.

Exercice 1.

Etudier les variations de la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x)$.

En déduire le minimum de f .

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $\left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}}{3x - 4}$.

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) La courbe représentative de f admet-elle une tangente de coefficient directeur 1 ?

Exercice 3.

On considère la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(c'est-à-dire $f(x) = \tan(x)$.)

Etudier les variations de f .

Exercice 4. (rapide)

Etudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{5}{7}x^7 - x^5$.

Bonus : Dériver la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3x+1} \cos(2x-4)$ sur $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$

Correction.

Exercice 1.

Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont dérivables sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Par opérations sur ces fonctions, on peut affirmer que f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) - 2(-\sin(x)) = 2 \sin(x) \cos(x) + 2 \sin(x) = 2 \sin(x)(\cos(x) + 1)$

$$\text{Rappel : } (u^2)' = 2u \times u'$$

Etude du signe de $f'(x)$:

On sait (ou d'après le cercle trigonométrique) que pour tout réel x de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\cos(x) \geq 0$.

On en déduit que $\cos(x) + 1 \geq 1$ et donc que $\cos(x) + 1$ est positif.

$f'(x)$ est donc du même signe que $\sin(x)$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-	0	+
f	1	-2	1

Conclusion : La fonction f admet donc -2 pour minimum, il est atteint pour $x = 0$.

Exercice 2.

1. f est le quotient de deux fonctions polynômes donc f est dérivable sur son ensemble de définition.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(2x - \frac{3}{2}\right)(3x - 4) - 3\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\right)}{(3x - 4)^2} = \frac{6x^2 - 8x - \frac{9}{2}x + 6 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 2}{(3x - 4)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 8x + 4}{(3x - 4)^2} \end{aligned}$$

Etude du signe de $f'(x)$:

$f'(x)$ est du même signe que $3x^2 - 8x + 4$ qui est un polynôme du second degré.

On trouve $\Delta = 16$ donc ce polynôme a deux racines : $\alpha = \frac{8 - \sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{8 + \sqrt{16}}{2 \times 3} = 2$

Le coefficient dominant est positif donc ce polynôme est positif sauf entre ses racines.

x	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f		$\frac{5}{6}$	

2. La courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur 1 au point d'abscisse x ssi $f'(x) = 1$ c'est-à-dire $\frac{3x^2 - 8x + 4}{(3x - 4)^2} = 1$.

Rappel : le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x est $f'(x)$.

Comme $(3x - 4)^2 \neq 0$ sur $\left] \frac{4}{3}; +\infty \right[$, cette équation équivaut à $3x^2 - 8x + 4 = (3x - 4)^2$ ou encore à $3x^2 - 8x + 4 = 9x^2 - 24x + 16$ c-à-d : $-6x^2 + 16x - 12 = 0$.

Cette équation du second degré a un discriminant négatif (-32) donc elle n'a pas de solution. La courbe représentative de f n'admet donc pas de tangente de coefficient directeur 1.

Exercice 3.

On considère la fonction définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ donc f est dérivable sur son ensemble de définition.

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Comme $f'(x) > 0$ alors f est croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Exercice 4.

f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = \frac{5}{7} \times 7x^6 - 5x^4 = 5x^6 - 5x^4 = 5x^4(x^2 - 1)$$

Etude du signe de $f'(x)$:

$x^2 - 1$ est un polynôme du second degré qui admet 1 et -1 comme racines [voir, par exemple, que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$]. Il est positif sauf entre ses racines d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^4		+		+	0	+		+	
$x^2 - 1$		+	0	-		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
f									

Bonus : $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \cos(2x-4) - 2\sqrt{3x+1} \sin(2x-4)$