

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation de la copie : un commentaire en français devra justifier toute formule, tout calcul, tout tableau, tout schéma.*

**L'utilisation du formulaire (sans annotation personnelle) et d'une calculatrice est autorisée**

**L'échange et le prêt des calculatrices sont interdits**

**EXERCICE 1** ( points)**Commun à tous les candidats**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

On note (C) la courbe représentative de  $f$ .

1. Étudier les variations de  $f$ . Déterminer la limite de  $f(x)$  en  $+\infty$ .

2. On définit la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $h(x) = f(x) - x$ .

a. Résoudre l'équation  $e^x - e^{-x} - 2 = 0$  (on pourra poser  $X = e^x$ )

b. En déduire que  $e^x - e^{-x} - 2 = \frac{(e^x - 1 - \sqrt{2})(e^x - 1 + \sqrt{2})}{e^x}$

c. Étudier les variations de  $h$ .

d. Montrer que  $h$  admet un minimum  $m$ , qui est strictement positif.

Calculer  $m$  et en donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.

3. On définit une suite  $(U_n)$  de la façon suivante :

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = f(U_n) \quad \text{pour } n \text{ entier naturel.}$$

a. Montrer que la différence  $U_{n+1} - U_n$  peut être minorée par  $m$  (calculé en 2.c.).

b. Démontrer par récurrence que  $U_n - U_0 \geq n.m$

c. En déduire la limite de  $(U_n)$ .

## EXERCICE 2 ( 5 points)

### Commun à tous les candidats

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ .

Soit  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .  
Déterminer les asymptotes de  $f$ .
2. Étudier le sens de variation de  $f$ .  
Dresser le tableau de variation de  $f$ .
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur l'intervalle  $[\frac{1}{e}; 1]$  une solution unique, notée  $\alpha$ .  
Déterminer un encadrement de  $\alpha$ , d'amplitude  $10^{-2}$ .  
Donner, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $f(x)$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
4. Tracer la courbe  $C$ .

## EXERCICE 3 ( 5 points)

### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a) Soit  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique réelle de premier terme  $r_0$  strictement positif et de raison  $\frac{2}{3}$ .  
Exprimer  $r_n$  en fonction de  $r_0$  et  $n$ .  
b) Soit  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique réelle de premier terme  $\theta_0$  appartenant à l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$   
et de raison  $\frac{2\pi}{3}$ .  
Exprimer  $\theta_n$  en fonction de  $\theta_0$  et de  $n$ .  
c) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $z_n = r_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$ .  
Sachant que  $z_0, z_1$  et  $z_2$  sont liés par la relation  $z_0 z_1 z_2 = 8$ , déterminer le module et un argument de  $z_0, z_1$  et  $z_2$ .
2. Dans le plan complexe  $P$  muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 4 cm), on appelle  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ .
  - a) Placer les points  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_3$  dans le plan  $P$ .
  - b) Pour tout entier  $n$ , exprimer  $z_{n+1}$  en fonction de  $z_n$ .
  - c) Calculer alors  $M_n M_{n+1}$  en fonction de  $n$ .
  - d) On pose  $l_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1} = M_0 M_1 + \dots + M_n M_{n+1}$ .  
Calculer  $l_n$  en fonction de  $n$  et déterminer la limite de  $l_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**EXERCICE 3** ( 5 points)

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

*Cet exercice est à traiter sur une feuille à part*

1. On considère l'équation (E)  $50x - 11y = 3$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a) Déterminer une solution particulière de l'équation  $50x - 11y = 1$  et en déduire une solution particulière  $(x_0, y_0)$  de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2.  $n$  est un entier naturel non nul . On considère les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que

Soit  $d = \text{PGCD}(a ; b)$ .

a) Montrer que  $d$  est un diviseur de 50. En déduire l'ensemble des valeurs possibles pour  $d$ .

b) Montrer que si  $d = 50$  alors il existe un entier  $m$  tel que

c) En déduire l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $\text{PGCD}( a, b) = 50$ .

3.

a) Montrer que si  $a$  est un entier impair non divisible par 5 alors  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (on pourra utiliser le résultat de la question 2 a).

b) Montrer que  $a$  est impair si et seulement si  $n$  est pair.

c) Déduire des questions précédentes deux valeurs supérieures à 100 de l'entier  $n$  tels que  $a$  et  $b$  soient premiers entre eux

**EXERCICE 4** ( points)

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté(ou la moitié s'il y a deux réponses exactes ...) ; une réponse inexacte enlève le quart du nombre de points affecté.

Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions : la question ne rapporte alors aucun point et n'en coûte aucun.

Les réponses devront être **justifiées** : en l'absence de justification la réponse ne sera pas prise en compte.

Pour chaque question, une ou plusieurs réponses sont exactes.

Si le total de points est négatif, la note est ramenée à zéro.

1. Une solution de  $z^2 + 2z + 4 = 0$  est dans  $\mathbb{C}$  :

$1 + i$       $-\sqrt{3} - i$       $2 e^{\frac{2i\pi}{3}}$       $-1 - i\sqrt{3}$ .

2. Soit  $z_1$  et  $z_2$  les nombres complexes définis par  $z_1 = \sqrt{3} - i$  et  $z_2 = 2i - z_1$ .

Alors  $\frac{z_2}{z_1} =$  :

$\sqrt{3} e^{\frac{i\pi}{2}}$       $- e^{\frac{-3i\pi}{4}}$       $2 e^{\frac{i\pi}{3}}$       $\sqrt{3} e^{\frac{5i\pi}{6}}$

3. Soit deux points A et B d'affixes respectives  $z_A = i$  et  $z_B = \sqrt{3}$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ . L'affixe de C, image de B par la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  est :

$-i$       $2i$       $\sqrt{3} + i$       $\sqrt{3} + 2i$

4. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe  $z = x + iy$  vérifiant la relation

$\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2}$  est inclus dans :

- La droite d'équation  $y = -x$
- Le cercle de centre  $I(-1 + i)$  et de rayon  $R = \sqrt{2}$
- La droite d'équation  $y = x$
- Le cercle de diamètre  $[AB]$ , A et B étant les points d'affixes respectives  $z_A = -2$  et  $z_B = 2i$ .

5. Soit A(-i), B(3) et C(2 + 3i). Le triangle ABC est :

- quelconque
- isocèle
- rectangle
- équilatéral