Probabilités

Notions à connaître avant d'aborder les exercices :

- L'arbre pondéré et ses règles de calcul.
- Epreuves répétées de manière indépendante.
- Dénombrement : les trois types de tirages (avec remise, sans remise, simultané)
- X étant une variable aléatoire : la loi de X, l'espérance de X, sa variance et son écart-type.

Exercice 1 D'après Nouvelle-Calédonie 2006

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
2.
   a. On choisit successivement et au hasard 10 animaux.
   On désigne par A l'évènement aucun animal n'est malade parmi les 10 .
   On désigne par B l'évènement au moins un animal est malade parmi les 10 .
   Calculer les probabilités de A et de B

3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8 . Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9 . On note T l'évènement avoir un test positif à cette maladie et M l'évènement être atteint de cette maladie .
   a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement T.
   c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Exercice 2 (D'après Asie 2006)

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : Pierre gagne la n -ième partie .
- P_n : Pierre perd la n -ième partie .

On pose : $p_n = p(\mathrm{G}_n)$ et $q_n = p(\mathrm{P}_n)$.

1. Recherche d'une relation de récurrence.
   a. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{G}_2)$ et $p_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{G}_2)$.
   b. Justifier l'égalité $p_n + q_n = 1$.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}2$.
2. Etude de la suite (p_n) .

   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

   a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n .
   b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n .
   c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 *(D'après Nouvelle Calédonie, novembre 2002)*

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Si les boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 euros; si exactement deux boules tirées sont rouges, il gangne 15 euros et si une seule est rouge, il gagne 4 euros. Dans tous les autres cas, il ne gagne rien.

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Pour un jeu, la mise est de 10 euros. Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, il envisage deux solutions:

   - soit augmenter la mise de départ de euro,

   - soit diminuer chaque gain de 1 euro.

   Quelle solution est la plus rentable pour l'organisateur ?