Etudes de fonctions

Les notions à connaître avant d'aborder les exerccices :

- Les calculs de dérivées et l'étude de leur signe.
- Les limites (règles de calculs, théorème des gendarmes, changement de variable) et leurs interprétations graphiques (les asymptotes)
- Equation de la tangente. Position relative d'une courbe et d'une de ses tangentes. Tangente particulière.
- Le théorème des valeurs intermédiaires.
- La dérivée seconde.
- Calculs d'aires.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur [0; + ∞ [par $f(x)=x\,e^{-x+2}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1. Etudier les variations de f, donner son tableau de variations et déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe C .

2. a) Tracer et la courbe représentative de la fonction $\ln$ dans un même graphique.
   b) Montrer que la fonction g définie sur [0; + ∞ [par $g(x)=\ln x-f(x)$ est strictement croissante sur [1;+ ∞ [. En déduire que l'équation $f(x)=\ln x$ admet une unique solution α sur [1;+ ∞ [.
   c) Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α .

3. Déterminer en cm^2 l'aire du domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$.

Exercice 2 *(D'après Amérique du Nord, juin 2005)*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;+ ∞ [par $f(x)=(x-1)(2-e^{-x})$
On note C sa courbe représentative dans repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1. a. Etudier la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est asymptote à C .
   c.Etudier la position relative de C et Δ .

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=x\,e^{-x}+2(1-e^{-x})$.
   a. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x)>0$.
   b. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.
   c. Déterminer le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ .
   d. Tracer C et Δ

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe C , la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

Exercice 3 *(D'après Polynésie, septembre 2003)*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(x) & = & \frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1.
   a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2.
   a. Etudier la dérivabilité de f en 0.
   b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0, f'$ désignant la fonction dérivée de f.

3. a. Etudier le sens de variations de f sur $[0\,;+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
   b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   c. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente D à la courbe C au point d'abscisse $x=1$.
2. On considère la fonction $g: x \to f(x)-2\mathrm{x}-\frac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g. étudier le sens de variations de g'.
   En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$
   b. Etudier le sens de variations de g. En déduire la position de la courbe C par rapport à la tangente D.

3. Construire la courbe C et la tangente D (unité graphique : 2 cm).