Nombres complexes

Les notions à connaître avant d'aborder les exercices :

- les calculs dans $\mathbb{C}$
- la résolution d'équations dans $\mathbb{C}$ du premier degré ou du second degré à coefficients réels
- les formes algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe.
- Les propriétés et l'interprétation géométrique du module et de l'argument.
- Les ensembles de points.
- L'écriture complexe d'une translation et d'une rotation.

Exercice 1 (*D'après Polynésie, septembre 2006)*

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
   On pose $a=3, b=5-2\mathrm{i}$ et $c=5+2\mathrm{i}$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.
   Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.
   a. Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
   b. Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}}$.
   c. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2\mathrm{i}}$ soit un nombre réel strictement négatif.
   d. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que $\left|\dfrac{z-3}{z-5+2i}\right|=1$

Exercice 2 *(Asie, Juin 2006)*

L plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z|=\|\vec{w}\|$ et $\arg(z)=(\vec{u}, \vec{w})$ à 2π près.

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z').$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$$

Partie B

On note A et B les points d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=\frac{\mathrm{i}z+3}{z+\mathrm{i}}$$

1. Etude de quelques cas particuliers.
   a. Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre [AB].
      Placer ces points sur le dessin.
   b. On note C le point d'affixe $c=-2+i$. Démontrer que le point C $'$, image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.
2. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que
   $\arg(z')=(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})+\frac{\pi}{2}$ à 2π près.
3. Etude de deux ensembles de points.
   a. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.
   b. Soit M d'affixe z un point du cercie de diamètre [AB] privé des points A et B. à quel ensemble appartient le point M' ?

EXERCICE 3 *(La Reunion, juin 2006)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z}=i$. écrire la solution sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+4=0$. écrire les solutions sous forme exponentielle.
3. Soient A, B, A $'$ et D les points du plan complexe d'affixes respectives :
   $a=2,\ b=4,\ a'=2i$ et $d=2+2i$.
   a. Quelle est la nature du triangle 0DB?
   b. Soient E et F les points d'affixes respectives $e=1-i\sqrt{3}$ et $f=1+i\sqrt{3}$.
      Quelle est la nature du quadrilatère OEAF?
4. Soit C le cercle de centre A et de rayon 2. Soit C' le cercle de centre A $'$ et de rayon 2.
   Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$
   a. On désigne par E $'$ l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E $'$.
   b. Démontrer que le point E $'$ est un point du cercle C'.
   c. Vérifier que : $e-d=(\sqrt{3}+2)(e'-d)$. En déduire que les points E, E $'$ et D sont alignés.
   d. Soit D $'$ l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE $'$ D $'$ est rectangle.