Exercice 1

Rangez chaque série dans l'ordre croissant :

1. $0,03$;$0,034$;$0,2$;$0,02794$;3×10^{-3}
2. 3×10^{-7} ;20×10^{-6} ;$0,000004$
3. $\frac{17}{3}$; $\frac{17}{4}$; $\frac{19}{3}$
4. $-\frac{17}{3}$;$-\frac{17}{4}$;$-\frac{19}{3}$
5. $\frac{5}{7}$; $\frac{2}{3}$
6. $\frac{3\times10^{-7}}{70}$; $\frac{2\times10^{-6}}{7}$

1. Si on a un doute, il peut être judicieux de tout mettre sous forme décimale, et de rajouter des 0 derrière la virgule pour comparer des nombres de même "longueur" :

   $0,03 = 0,03000$;
   $0,034 = 0,03400$;
   $0,2 = 0,20000$;
   $0,02794$;
   $3\times10^{-3} = 0,00300$
   Ainsi :
   $\boxed{3\times10^{-3} < 0,02794 < 0,03 < 0,2 < 0,034}$

2. Ici le plus simple est de mettre tout à la même puissance de 10 :

   3×10^{-7} ;
   $20\times10^{-6} = 200\times10^{-7}$;
   $0,000004 = 4\times10^{-6} = 40\times10^{-7}$
   Ainsi :
   $\boxed{3\times10^{-7} < 40\times10^{-7} < 200\times10^{-7}}$.

3. Il faut ici se souvenir que plus on divise par quelque chose de grand, plus le résultat est petit. Il faut aussi savoir comparer deux nombres au même dénominateur :

   $\boxed{\frac{17}{4} < \frac{17}{3} < \frac{19}{3}}$

4. $-\frac{17}{3}$;$-\frac{17}{4}$;$-\frac{19}{3}$

   Les nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire : plus leur valeur absolue est grande, plus ils sont petits

   $\boxed{-\frac{19}{3} < -\frac{17}{3} < -\frac{17}{4}}$

5. Il faut mettre ces nombres au même dénominateur avant de comparer :

   $\frac{5}{7} = \frac{3\times5}{3\times7} = \frac{15}{21}$;
   $\frac{2}{3} = \frac{2\times7}{3\times7} = \frac{14}{21}$;
   Ainsi :
   $\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$

6. $\frac{3\times10^{-7}}{70}$;
   $\frac{2\times10^{-6}}{7} = \frac{2\times10^{-6}\times10}{7\times10} = \frac{2\times10^{-5}}{70} = \frac{200\times10^{-7}}{70}$
   Ainsi :
   $\boxed{\frac{3\times10^{-7}}{70} < \frac{2\times10^{-6}}{7}}$

Exercice 2

Soient x, y et z trois réels tels que :
$0 < x < 5$
$2 < y < \frac{9}{2}$
$-5 < z < -3$

1. Donnez un encadrement de $2x$, de $-2y$ et de $z-5$
2. Donnez un encadrement de $x+z$
3. Montrez que $-2 < 3-x < 3$
4. Donnez un encadrement de xy et $\frac{x}{y}$
5. Montrez que $-10 < z-x < -3$

1. Donnez un encadrement de $2x$, de $-2y$ et de $z-5$

   On a $0 < x < 5$

   On applique la règle 2 : on peut multiplier des inégalités par un nombre positif :

   $2\times0 < 2\times x < 2\times5$
   $\boxed{0 < 2x < 10}$
   On a $2 < y < \frac{9}{2}$

   On applique la règle 3 : on peut multiplier des inégalités par un nombre négatif, mais il faut en changer le sens :

   $(-2)\times2 > (-2)\times y > (-2)\times\frac{9}{2}$
   $-4 > -2y > -\frac{2\times9}{2}$
   $-4 > -2y > -9$
   On a $-5 < z < -3$

   On applique la règle 1 : on peut ajouter ou soustraire n'importe quel nombre :

   $-5-5 < z-5 < -3-5$

2. On a $0 < x < 5$ et $-5 < z < -3$:

   On applique le théorème : si $a < b$ et $c < d$ alors $a+c < b+d$:

   $0+(-5) < x+z < 5+(-3)$
   $\boxed{-5 < x+z < 2}$

3. Montrez que $-2 < 3-x < 3$

   Attention à la consigne "montrer que" ! Cela signifie qu'on doit parvenir, ici par une suite de caluls, au résultat demandé. Il est inutile de commencer par lui ! Il faut commencer par ce que nous connaissons, et progresser pas à pas :

   On a $0 < x < 5$

   On commence par obtenir un $-$ en multipliant par (-1). Attention au changement de sens !

   $(-1)\times0 > (-1)\times x > (-1)\times5$
   $0 > -x > -5$

   Il reste à s'occuper du 3 :

   $0+3 > -x+3 > -5+3$
   $3 > 3-x > -2$

On peut changer l'ordre de lecture :

$-2 < 3 - x < 3$ □.

4. On a $0 < x < 5$ et $2 < y < \frac{9}{2}$

On applique le théorème : si $a < b$ et $c < d$ alors $ac < bd$ à condition que tous ces nombres soient positifs ! Il faut le préciser

Ici tous les nombres donnés sont positifs, et $0 < x$ et $2 < y$ donc x et y sont positifs :

$0 \times 2 < x \times y < 5 \times \frac{9}{2}$

$0 < xy < \frac{5\times 9}{2}$

$\boxed{0 < xy < \frac{45}{2}}$

On a $0 < x < 5$ et $2 < y < \frac{9}{2}$

On applique le théorème : si $a < b$ et $c < d$ alors $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ toujours à condition que tous ces nombres soient positifs. Il faut faire attention à l'inversion : on divise par le grand nombre du côté le plus petit !

Comme dit plus haut, tous ces nombres sont positifs. D'autre part :

$0 < x$ et $y < \frac{9}{2}$ donc $\frac{0}{\frac{9}{2}} < \frac{x}{y}$

$0 < \frac{x}{y}$

et de l'autre côté :

$x < 5$ et $2 < y$ donc $\frac{x}{y} < \frac{5}{2}$

Ainsi en regroupant :

$\boxed{0 < \frac{x}{y} < \frac{5}{2}}$

5. Montrez que $-10 < z - x < -3$

On a $0 < x < 5$

$(-1) \times 0 > (-1) \times x > (-1) \times 5$

$0 > -x > -5$

Autrement dit : $-5 < -x < 0$

On a d'autre part $-5 < z < -3$ donc :

$-5 + (-5) < -x + z < 0 + (-3)$

$-10 < z - x < -3$ □.

Exercice 3

Résolvez les inéquations suivantes :

1. $3 - 2x \leq 5x - 1$
2. $\frac{1}{6} - \frac{x}{3} \geq \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$.

1. $3 - 2x \leq 5x - 1$

$3 + 1 \leq 5x + 2x$

$4 \leq 7x$

$\frac{4}{7} \leq x$

L'ensemble solution de l'inéquation est $\boxed{[\frac{4}{7}; +\infty[}$.

2. $\frac{1}{6} - \frac{x}{3} \geq \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

$\frac{3x}{6} - \frac{2x}{6} \geq \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$

$\frac{x}{6} \geq \frac{2}{6}$

$x \geq 2$

L'ensemble solution de l'inéquation est $\boxed{[2; +\infty[}$.

Exercice 4

Pour chaque expression suivante, étudiez son signe :

1. $A(x) = 3x - 21$
2. $B(x) = 10 - 5x$
3. $C(x) = -\frac{3x}{4} + \frac{4}{7}$

1. $A(x) = 3x - 21$

$3x - 21 \geq 0$

$3x \geq 21$

$x \geq \frac{21}{3}$.

$x \geq 7$.

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$3x - 21$		$-$	0	$+$	

2. $B(x) = 10 - 5x$

$10 - 5x \geq 0$

$10 \geq 5x$

$\frac{10}{5} \geq x$

$2 \geq x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$10 - 5x$		$+$	0	$-$	

3. $C(x) = \frac{4}{7} - 2x$

$\frac{4}{7} - 2x \geq 0$

$\frac{4}{7} \geq 2x$

$\frac{4}{7\times 2} \geq x$

$\frac{4}{14} \geq x$

$\frac{2}{7} \geq x$

x	$-\infty$		$\frac{2}{7}$		$+\infty$
$\frac{4}{7} - 2x$		$+$	0	$-$	

Exercice 5

Pour chaque expression suivante, étudiez son signe :

1. $D(x) = (\frac{5x}{3} - 10)(-6x + 8)$.
2. $E(x) = (18x - 10)(-3x + 4)(-7x + 12)$.
3. $F(x) = \frac{x-1}{1-3x}$.

1. $D(x) = (\frac{5x}{3} - 10)(-6x + 8)$.

On étudie les signes :

$\frac{5x}{3} - 10 \geq 0$	$-6x + 8 \geq 0$
$\frac{5x}{3} \geq 10$	$8 \geq 6x$
$x \geq \frac{3\times 10}{5}$	$\frac{8}{6} \geq x$
$x \geq 6$.	$\frac{4}{3} \geq x$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		6		$+\infty$
$\frac{5x}{3}-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$-6x+8$		$+$	0	$-$		$-$	
$(\frac{5x}{3}-10)(-6x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. $E(x)=(18x-10)(-3x+4)(-7x+12)$.

On étudie les signes :

$18x-10\geq 0$	$-3x+4\geq 0$	$-7x+12\geq 0$
$18x\geq 10$	$4\geq 3x$	$12\geq 7x$
$x\geq\frac{10}{18}$ $x\geq\frac{5}{9}$.	$\frac{4}{3}\geq x$	$\frac{12}{7}\geq x$

x	$-\infty$		$\frac{5}{9}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{12}{7}$		$+\infty$
$18x-10$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-3x+4$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$-7x+12$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{5x}{3}-10)(-6x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $F(x)=\frac{x-1}{1-3x}$.

On étudie les signes :

$x-1\geq 0$	$1-3x\geq 0$
$x\geq 1$.	$1\geq 3x$
	$\frac{1}{3}\geq x$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-3x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{x-1}{1-3x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Exercice 6

Résolvez les inéquations suivantes :

1. $(2x-10)(3x+12)\leq 0$
2. $\frac{3x-1}{2x+4}>0$
3. $\frac{3x-1}{2x+4}\geq 1$
4. $(x+2)(1-2x)+x^2+4x+4\geq 0$

1. $(2x-10)(3x+12)\leq 0$

On étudie les signes :

$2x-10\geq 0$	$-3x+12\geq 0$
$2x\geq 10$	$12\geq 3x$
$x\geq 5$	$4\geq x$

x	$-\infty$		4		5		$+\infty$
$2x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x+12$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-10)(3x+12)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On lit dans le tableau l'ensemble solution de l'inéquation : $\boxed{]-\infty;4]\cup[5;+\infty[}$.

2. $\frac{3x-1}{2x+4}\geq 0$

On étudie les signes :

$3x-1\geq 0$	$2x+4\geq 0$
$3x\geq 1$	$2x\geq 4$
$x\geq\frac{1}{3}$.	$x\geq 2$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x-1}{2x+4}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Attention : pour l'ensemble des solutions, on ouvre toujours les crochets sur les infinis et les valeurs interdites !

On lit dans le tableau l'ensemble solution de l'inéquation : $\boxed{]-\infty;\frac{1}{3}]\cup]2;+\infty[}$.

3. $\frac{3x-1}{2x+4}\geq 1$

Attention ! On ne peut pas faire d'étude de signe tant qu'on a pas 0 pour un membre de l'équation, on commence donc par transformer :

$\frac{3x-1}{2x+4}-1\geq 0$

Il faut maintenant arranger l'expression à gauche pour pouvoir étudier un signe :

$\frac{3x-1}{2x+4}-\frac{2x+4}{2x+4}\geq 0$

$\frac{3x-1-(2x+4)}{2x+4}\geq 0$

$\frac{3x-1-2x-4}{2x+4}\geq 0$

$\frac{x-5}{2x+4}\geq 0$

On étudie les signes :

$x-5\geq 5$	$2x+4\geq 0$
$x\geq 5$	$2x\geq 4$
	$x\geq 2$.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+4$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$\frac{3x-1}{2x+4}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On lit dans le tableau l'ensemble solution de l'inéquation : $\boxed{]-\infty;2]\cup]5;+\infty[}$.

4. $(x+2)(1-2x)+x^2+4x+4 \geq 0$

Le carré va nous empêcher de résoudre l'équation sans étude de signe. Pour faire cette dernière, il faut un produit ou un quotient. Nous commençons donc par factoriser (on repère l'identité remarquable !) :

$(x+2)(1-2x)+2\times x\times 2+2^2 \geq 0$
$(x+2)(1-2x)+(x+2)^2 \geq 0$
$(x+2)(1-2x)+(x+2)(x+2) \geq 0$
$(x+2)((1-2x)+(x+2)) \geq 0$
$(x+2)(3-x) \geq 0$

On étudie les signes :

$x+2 \geq 0$ $\qquad$ $3-x \geq 0$
$x \geq -2$ $\qquad$ $3 \geq x$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+2)(3-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On lit dans le tableau l'ensemble solution de l'inéquation : $\boxed{[-2;0]}$.

Exercice 7

1. On suppose que $-7<x<-2$. Trouvez un encadrement de x^2
2. On suppose que $-5<x<-1$. Trouvez un encadrement de $\frac{1}{x}$
3. On suppose que $1<\sqrt{x}<4$. Trouvez un encadrement de x
4. On suppose que $1<x^2<4$. Trouvez un encadrement de x

1. $-7<x<-2$

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$:

$(-7)^2>x^2>(-2)^2$

$\boxed{49>x^2>4}$

2. $-5<x<-1$

La fonction inverse est stricement décroissante sur $]-\infty;0[$:

$\frac{1}{-5}>x>\frac{1}{-1}$

$\boxed{-\frac{1}{5}>x>-1}$

3. $1<\sqrt{x}<4$

La fonction carré est strictement croissante sur $]0;+\infty[$:

$1^2<\sqrt{x}^2<4^2$

$\boxed{1<x<16}$

4. $1<x^2<4$

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $]0;+\infty[$:

$\sqrt{1}<\sqrt{x^2}<\sqrt{4}$

$\boxed{1<x<2}$

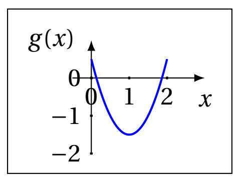
Exercice 8

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2(x-1)^2-\frac{3}{2}$.

1. Tracez une représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé (unité : 1 cm) sur [0 ;2].
2. On observe deux "phases" dans la courbe : sur quel intervalle g semble-t-elle croissante ? En utilisant le dessin, proposez un tableau de variation de g.
3. Etudiez le sens de variation de g sur $[1;+\infty[$.
4. Etudiez le sens de variation de g sur $]-\infty;1]$.

1.

x :	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$g(x)$:	$0,5$	-1	$-1,5$	-1	$0,5$



2. g semble croissante sur $\boxed{[1;2]}$:

x	0	1	2
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

3. Soient x et y deux réels tels que $1 \leq x \leq y$

$0 \leq x-1 \leq y-1$

La fonction carré est strictement croissante sur $]0;+\infty[$:

$(x-1)^2 \leq (y-1)^2$
$2\times(x-1)^2 \leq 2\times(y-1)^2$
$2\times(x-1)^2-\frac{3}{2} \leq 2\times(y-1)^2-\frac{3}{2}$
$g(x) \leq g(y)$

Nous avons montré que si $1 \leq x \leq y$ alors $g(x) \leq g(y)$: g est $\boxed{\text{croissante sur } [1;+\infty[}$.

4. Soient x et y deux réels tels que $x \leq y \leq 1$

$x-1 \leq y-1 \leq 0$

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$:

$(x-1)^2 \geq (y-1)^2$
$2\times(x-1)^2 \geq 2\times(y-1)^2$
$2\times(x-1)^2-\frac{3}{2} \geq 2\times(y-1)^2-\frac{3}{2}$
$g(x) \geq g(y)$

Nous avons montré que si $x \leq y \leq 1$ alors $g(x) \geq g(y)$: g est $\boxed{\text{décroissante sur }]-\infty;1]}$.