

Calcul intégral

Notion à connaître avant de commencer les exercices :

- Les formules de calculs de primitives
- L'intégration par parties
- L'interprétation géométrique d'une intégrale
- Les propriétés (linéarité, relations de Chasles, ordre et encadrement)
- La fonction d'aire et son utilisation comme primitive de f .
- Les calculs de volume

Exercice 1 (D'après La Réunion, 2005)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x+1)$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit α un nombre réel strictement positif. Calculer $I(\alpha) = \int_0^\alpha \ln(x+1) dx$.

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 2 (D'après France, septembre 2004)

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$: $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$

b) Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

3. En utilisant les résultats des questions précédentes, calculer $\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x dx$

On donnera le résultat sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$ avec p et q rationnels.

Exercice 3 (D'après Centres étrangers, juin 2006)

On considère la fonction f définie sur l'ensemble \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

Partie A

1. Vérifier que pour tout nombre réel x , $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} . Dresser le tableau de variations de f .

4. Tracer la courbe C et ses asymptotes éventuelles.

Partie B Quelques propriétés graphiques

1. On considère les points M et M' de la courbe d'abscisses respectives x et $-x$.

Déterminer les coordonnées du point A milieu du segment $[MM']$. Que représente le point A pour la courbe C ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y=1$, la courbe C et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$. A_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unités d'aires.

a) Calculer A_n .

b) Etudier la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C Calcul d'un volume

Soit λ un réel positif, on note $V(\lambda)$ l'intégrale $\int_{-\lambda}^0 \pi |f(x)|^2 dx$

On admet que $V(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unités de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe C obtenue pour $-\lambda \leq x \leq 0$.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que : $\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{ae^x}{e^x+1} + \frac{be^x}{(e^x+1)^2}$
2. Exprimer $V(\lambda)$ en fonction de λ .
3. Déterminer la limite de $V(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 (D'après Amérique du Sud, novembre 2005)

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-x^2} \text{ et } g(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

On note respectivement C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1. Identifier C_f et C_g sur la figure fournie. (Justifier la réponse apportée).
2. Etudier la parité des fonctions f et g .
3. Etudier le sens de variation de f et de g . étudier les limites éventuelles de f et de g en
4. Etudier la position relative de C_f et C_g .

Partie B

On considère la fonction G définie sur \mathbb{R} par

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt.$$

1. Que représente G pour la fonction g ?
2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.
3. étudier le sens de variations de G sur \mathbb{R} .

On définit la fonction F sur \mathbb{R} par : pour tout réel x , $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Démontrer, que, pour tout réel x , $G(x) = \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}]$; (on pourra commencer par comparer les

fonctions dérivées de G et de $x \rightarrow \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}]$. On admet que la fonction F admet une limite finie l en $+\infty$, et que cette limite l est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine A limité par la courbe C_f et les demi-droites $[O; \vec{i})$ et $[O; \vec{j})$.

4.
 - a. Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.
 - b. Interpréter en termes d'aires le réel $N = \int_0^1 (1-t^2) e^{-t^2} dt$.
 - c. En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire P en unités d'aires du domaine D limité par la demi-droite $(O; \vec{i})$ et la courbe C_g , justifier graphiquement que :

$$\int_0^1 (1-t^2) e^{-t^2} dt \geq \frac{l}{2}$$

On pourra illustrer le raisonnement sur la figure.