CHAPITRE 8 : FONCTION EXPONENTIELLE

1. Définition

La fonction exponentielle, notée $\exp x$ est la fonction qui, à chaque réel x associe le nombre réel strictement positif e^x où e est le nombre réel tel que $\ln e = 1$.($e \approx 2{,}718\ 281828$........)

On a donc pour tout réel x : $\exp x = e^x$.

Conséquences :

Pour tout réel x on a : $\boxed{e^x > 0}$.

Une exponentielle est TOUJOURS strictement positive.

Pour tout réel x et tout réel y strictement positif on a : $\boxed{y = e^x \iff \ln y = x}$

Pour tout réel x on a : $\boxed{\ln e^x = x}$

Pour tout réel x strictement positif on a : $\boxed{e^{\ln x} = x}$

<u>exemples</u>

Résoudre les équations suivantes :

$e^x = 3$ _

$e^{2x-5} = 3$ _

2. Propriétés de la fonction exponentielle

- La fonction $f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$

- La fonction $f(x) = e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc pour tous réels a et b :

$$\boxed{\begin{array}{l} a = b \iff e^a = e^b \\ a < b \iff e^a < e^b \end{array}}$$

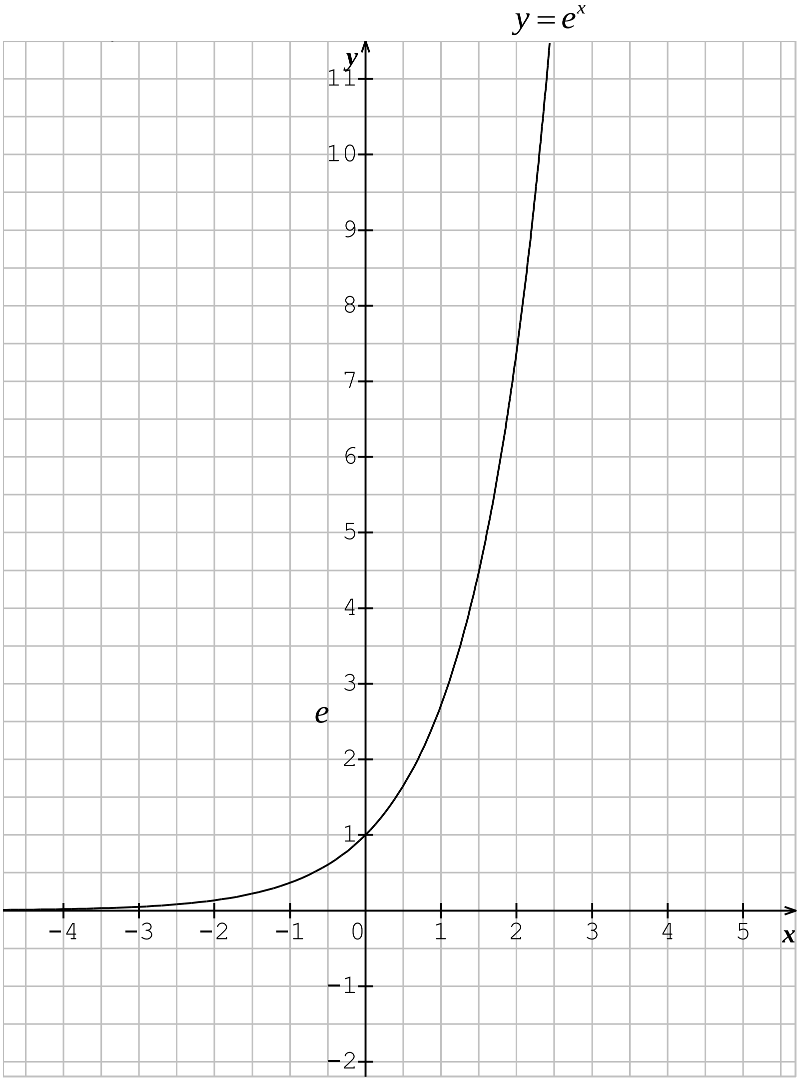
- En particulier :

$$\boxed{\begin{array}{l} e^a = 1 \iff a = 0 \\ e^a > 1 \iff a > 0 \\ 0 < e^a < 1 \iff a < 0 \end{array}}$$

- Tableau de variation de la fonction $f(x)=e^x$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)=e^x$	$+$
$f(x)=e^x$	$\nearrow$

- Courbe représentative de la fonction $f(x)=e^x$ sur $\mathbb{R}$.



3. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Dans ce paragraphe a et b sont des réels quelconques
(les exponentielles ont toutes les propriétés des puissances.)

- Exponentielle d'une somme : $\boxed{e^{a+b} = e^{a} \times e^{b}}$.

- Exponentielle d'une différence : $\boxed{e^{a-b} = \dfrac{e^{a}}{e^{b}}}$; en particulier : $\boxed{e^{-b} = \dfrac{1}{e^{b}}}$.

- Puissance d'une exponentielle : $\boxed{\left(e^{a}\right)^{b} = e^{a \times b}}$.

<u>exemple</u>

Simplifier les écritures suivantes :

$e^{x} \times e^{3x} =$ ________

$e^{3} \times e^{4x} =$ ________

$\dfrac{e^{2x}}{e^{3}} =$ ________

$e^{-3x} =$ ________

$\left(e^{3x+2}\right)^{2} =$ ________

$e^{\ln 3x} =$ ________ pour $x \in \left]\, 0\,;+\infty \,\right[$

$e^{2+\ln x} =$ ________________ pour $x \in \left]\, 0\,;+\infty \,\right[$

4. **Fonctions composées avec une exponentielle**

- La fonction $f(x) = e^{ax+b}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\left(e^{ax+b}\right)' = a \times e^{ax+b}}$

Une exponentielle est toujours strictement positive, donc la dérivée a le même signe que a .
Conclusion : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$,
mais f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$.

<u>exemples</u>

1) Soit $f(x) = e^{2x-3}$.
Ensemble de définition :

Dérivée de f : $f'(x) =$

Signe de la dérivée :

Tableau de variation de f :

2) Soit $f(x) = e^{4-x}$.
Ensemble de définition :

Dérivée de f : $f'(x) =$

Signe de la dérivée :

Tableau de variation de f :

5. Fonctions a^x avec a réel strictement positif

- Soit a un réel strictement positif.

Pour tout réel x on a : $a^x = e^{x\ln a}$.
La fonction $f(x) = a^x$ est donc une fonction exponentielle déjà étudiée dans le paragraphe précédent.
Pour tout réel x on a : $a^x = e^{x\ln a}$, donc $a^x > 0$

- La fonction $f(x) = a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\boxed{(a^x)' = \ln a \times a^x}$

a^x est toujours strictement positive, donc la dérivée a le même signe que $\ln a$.

$\boxed{\text{si } a > 1}$ alors $\ln a > 0$, f' est strictement positive et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{si } 0 < a < 1}$ alors $\ln a < 0$, f' est strictement négative et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

<u>exemples</u>

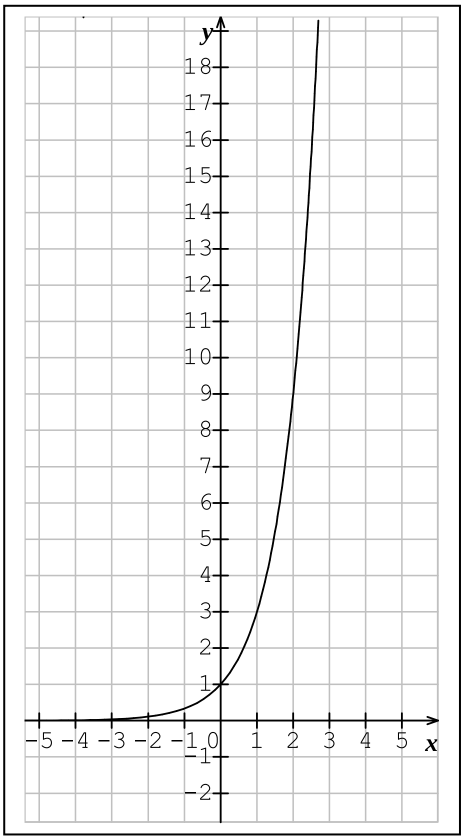
1)Soit $f(x) = 3^x$.
Ensemble de définition :

Dérivée de f : $f'(x) =$

Signe de la dérivée :

Tableau de variation de f :

Représentation graphique de f :



2)Soit $f(x) = 0,4^x$.

Ensemble de définition :

Dérivée de f : $f'(x) =$

Signe de la dérivée :

Tableau de variation de f :

Représentation graphique de f :