CHAPITRE 5 : SUITES NUMERIQUES

1. Rappels sur les suites arithmétiques

Définition :
Une suite (u_n) est une suite arithmétique de raison a
si et seulement si pour tout entier naturel n on a : $\boxed{u_{n+1} = u_n + a}$.

Terme de rang quelconque :
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison a ,
pour tout entier naturel p on a : $\boxed{u_p = u_0 + p \times a}$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison a ,
pour tout entier naturel p on a : $\boxed{u_p = u_1 + (p-1) \times a}$.

2. Rappels sur les suites géométriques

Définition :
Une suite (v_n) est une suite géométrique de raison q
si et seulement si pour tout entier naturel n on a : $\boxed{v_{n+1} = v_n \times q}$.

Terme de rang quelconque :
Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q ,
pour tout entier naturel p on a : $\boxed{v_p = v_0 \times q^P}$.

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_1 et de raison q ,
pour tout entier naturel p on a : $\boxed{v_p = v_1 \times q^{p-1}}$.

3. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique.
Soit k et p deux entiers naturels tels que $k < p$.
Soit $S = u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + ... + u_p$ la somme de termes **consécutifs** de cette suite.
On a

$$\boxed{S = (\text{nombre de termes de la somme}) \times \frac{(\text{premier terme de la somme}) + (\text{dernier terme de la somme})}{2}}$$

Cas particuliers:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$S = u_1 + u_2 + u_3 .... + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

<u>exemples</u>

1) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $a = 0,5$.
Calculer $S = u_6 + u_7 .... + u_{12}$

2) Calculer $3 + 6 + 9 + 12 + ...99$

4. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Soit k et p deux entiers naturels tels que $k < p$.
Soit $S = v_k + v_{k+1} + v_{k+2} + ... + v_p$ la somme de termes **consécutifs** de cette suite.

On a $\boxed{S = (\textit{premier terme de la somme}) \times \dfrac{1-(\textit{raison de la suite})^{\textit{nombre de termes de la somme}}}{1-(\textit{raison de la suite})}}$

Cas particuliers:

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$S = v_1 + v_2 + v_3 .... + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

<u>**exemples**</u>

1) (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $q = 3$.
Calculer $S = v_6 + v_7 .... + v_{12}$

2) Calculer $3 + 6 + 12 + 24 + ...1536$

5. Sens de variation et limite d'une suite géométrique

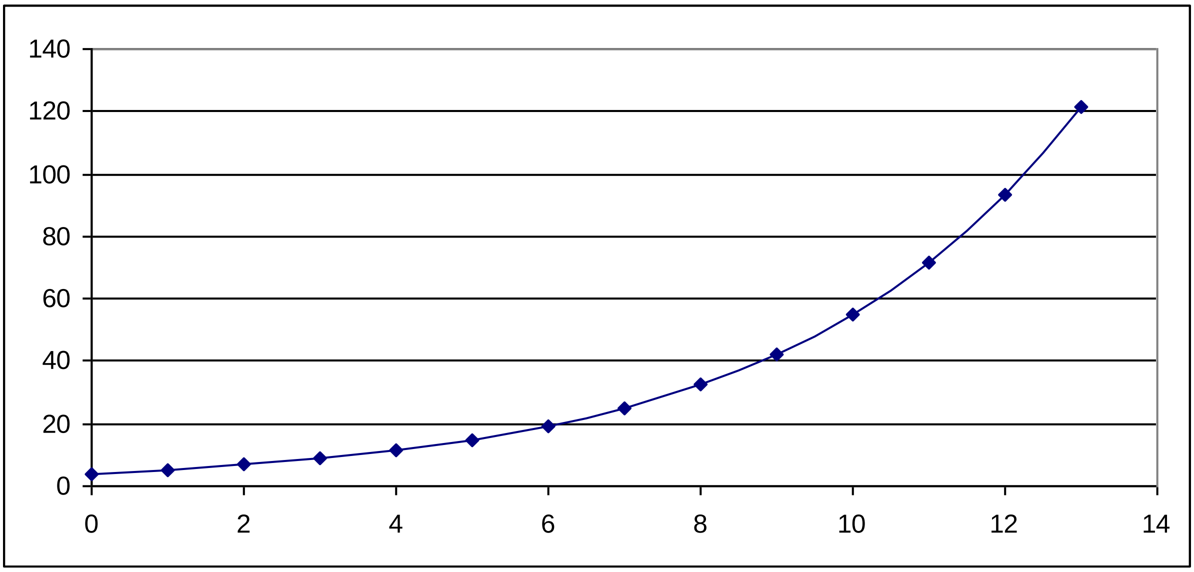
Soit (v_n) une suite géométrique de raison q strictement positif, et de premier terme strictement positif.

> Si $q > 1$, alors la suite est strictement croissante et a pour limite $+\infty$.
> Si $0 < q < 1$, alors la suite est strictement décroissante et a pour limite 0 .

<u>exemples</u>

1) (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $q = 1{,}3$.
Le premier terme de cette suite géométrique est strictement positif, sa raison est strictement plus grande que 1, donc la suite (v_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

n	v_n
0	4
1	5,2
2	6,76
3	8,788
4	11,4244
5	14,85172
6	19,307236
7	25,0994068
8	32,6292288
9	42,4179975
10	55,1433967
11	71,6864158
12	93,1923405
13	121,150043



2) $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 104$ et de raison $q = 0,5$.
Le premier terme de cette suite géométrique est strictement positif, sa raison est strictement comprise entre 0 et 1, donc la suite $\left(v_n\right)$ est strictement décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

n	v_n
0	104
1	52
2	26
3	13
4	6,5
5	3,25
6	1,625
7	0,8125
8	0,40625
9	0,203125
10	0,1015625
11	0,05078125
12	0,02539063
13	0,01269531
14	0,00634766