CHAPITRE 3 : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1. Définition

La fonction logarithme népérien est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ on note : $f(x)=\ln x$,
sa dérivée sur $]0\,;+\infty[$ est $f\,'(x)=\dfrac{1}{x}$, et $\ln 1=0$.

2. Propriétés de la fonction logarithme népérien

- La fonction $f(x)=\ln x$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$: $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$

- La fonction $f(x)=\ln x$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Donc pour tous réels a et b de l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$$\boxed{\begin{array}{lll} a=b & \Leftrightarrow & \ln a=\ln b \\ a<b & \Leftrightarrow & \ln a<\ln b \end{array}}$$

- En particulier :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \ln a=0 & \Leftrightarrow & a=1 \\ \ln a>0 & \Leftrightarrow & a>1 \\ \ln a<0 & \Leftrightarrow & 0<a<1 \end{array}}$$

- Nombre e :

e est le seul réel dont le logarithme népérien est égal à 1 . $\boxed{\ln a=1 \quad \Leftrightarrow \quad a=e}$
$e \approx 2,718....$

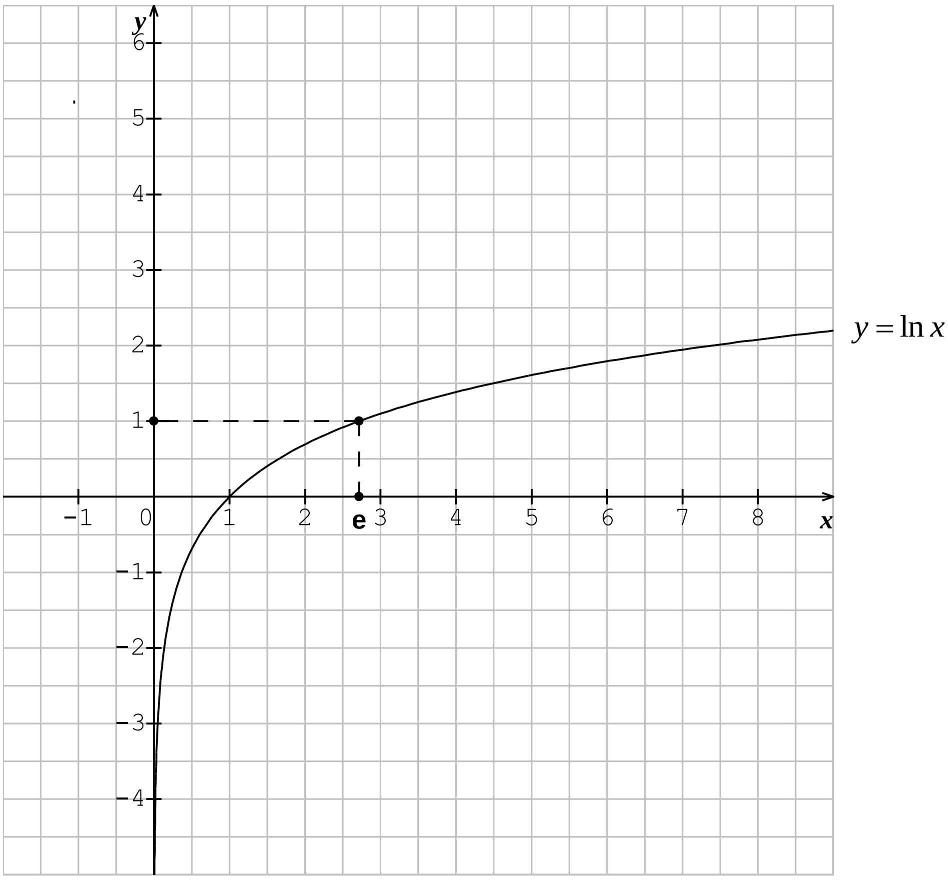
- Tableau de variation de la fonction $f(x)=\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f\,'(x)=\dfrac{1}{x}$	$+$
$f(x)=\ln x$	$\nearrow$

- Tableau de signe de la fonction $f(x) = \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x) = \ln x$		$-$	0	$+$	

- Courbe représentative de la fonction $f(x) = \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.



3. Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Dans ce paragraphe a et b sont des réels strictement positifs.

- Logarithme d'un produit : $\boxed{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}$

- Logarithme d'un quotient : $\boxed{\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b}$

- Logarithme d'un inverse : $\boxed{\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b}$

- Logarithme d'une puissance : $\boxed{\ln(a^n) = n.\ln a}$ avec n entier relatif quelconque.

- Logarithme d'une racine : $\boxed{\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a}$

exemples à l'aide de la calculatrice, calculer avec une précision au centième :

$\ln(9\times 2)=$ .... et $\ln 9 + \ln 2 =$ ....

$\ln\dfrac{9}{2}=$ .... et $\ln 9 - \ln 2 =$ ....

$\ln\dfrac{1}{2}=$ .... et $-\ln 2 =$ ....

$\ln 9^3 =$ .... et $3\ln 9 =$ ....

$\ln 9^{-4} =$ .... et $-4\ln 9 =$ ....

$\ln\sqrt{9} =$ .... et $\dfrac{1}{2}\ln 9 =$ ....

4. Fonctions composées avec le logarithme népérien

- La fonction $f(x)=\ln(ax+b)$ est définie pour tout réel x tel que $ax+b>0$.

Soit I l'intervalle où on a : $ax+b>0$.

- La fonction $f(x)=\ln(ax+b)$ est dérivable sur I : $\boxed{(\ln ax+b)'=\dfrac{a}{ax+b}}$

Sur l'intervalle I on a $ax+b>0$, donc la dérivée a le même signe que a ,
Conclusion : f est strictement croissante sur I si $a>0$ mais strictement décroissante sur I si $a<0$.

exemples

1) Soit $f(x)=\ln(2x-3)$.

Ensemble de définition :

f est dérivable sur , sa dérivée est $f'(x)=$

Signe de la dérivée :

Tableau de variation de f :

2) Soit $f(x)=\ln(4-x)$.

Ensemble de définition :

f est dérivable sur , sa dérivée est $f'(x)=$

Signe de la dérivée :

Tableau de variation de f :