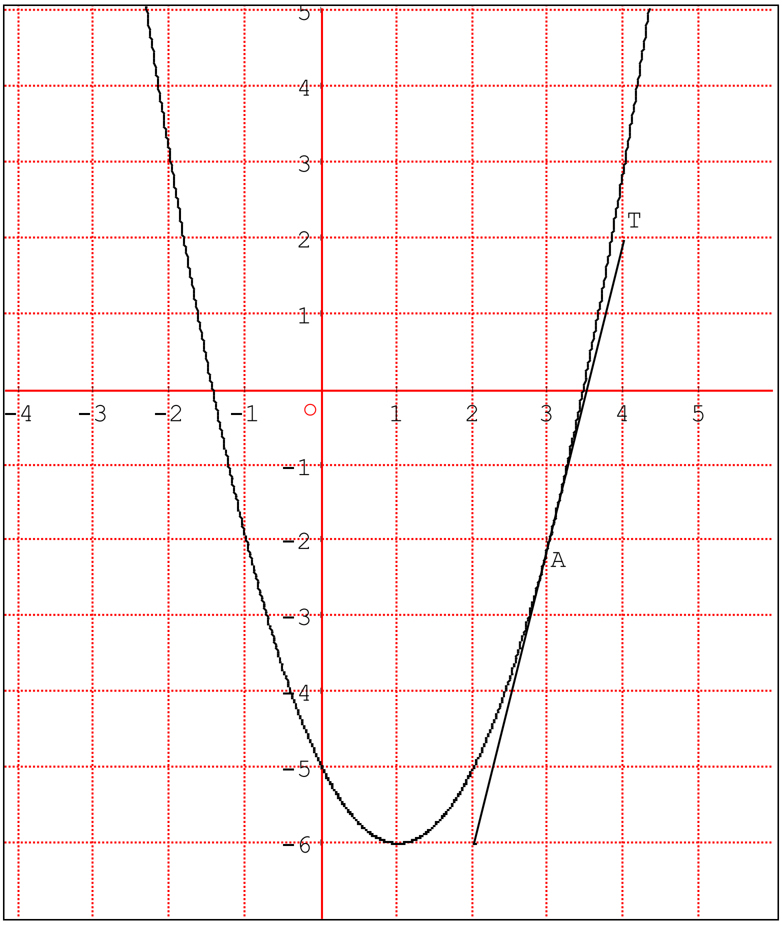
CHAPITRE 2 : DERIVEES

1. Rappels

Quand il existe, le nombre dérivé d'une fonction f en $x = a$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = a$. On note ce nombre $f'(a)$.

exemple

La fonction f dessinée ci-dessous admet une tangente T en $x = 3$,
cette tangente a pour coefficient directeur 4,
donc le nombre dérivé de f en $x = 3$ est 4 . On note $f'(3) = 4$.



2. Définitions

On dit que la fonction f est **dérivable sur l'intervalle I**
quand f admet un nombre dérivé pour tout $x \in I$.
Dans ce cas, on appelle **dérivée de f** la fonction notée f' qui à tout $x \in I$
associe le nombre dérivé de f en x .

Vocabulaire Lorsque la fonction g est la dérivée de la fonction f sur un intervalle I ,
on dit aussi que f est **une primitive** de g sur l'intervalle I .

3. Dérivées des fonctions de références

fonction	dérivable sur	dérivée
k *constante réelle*	sur $\mathbb{R}$	0
x	sur $\mathbb{R}$	1
x^2	sur $\mathbb{R}$	$2x$
x^3	sur $\mathbb{R}$	$3x^2$
x^n (avec n entier positif)	sur $\mathbb{R}$	$n\,x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	sur $\left]-\infty;0\right[$ ou sur $\left]0;+\infty\right[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^2}$	sur $\left]-\infty;0\right[$ ou sur $\left]0;+\infty\right[$	$-\dfrac{2}{x^3}$
$\dfrac{1}{x^n}$ ou x^{-n} (avec n entier positif)	sur $\left]-\infty;0\right[$ ou sur $\left]0;+\infty\right[$	$-n\,x^{-n-1}$ ou $\dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	sur $\left]0;+\infty\right[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>exemples</u>

1) $f(x)=x^6$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x)=$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}=$ f est dérivable sur $\left]-\infty;0\right[$ ou sur $\left]0;+\infty\right[$.

On a $f'(x)=$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

Dans le tableau suivant u et v sont des fonctions dérivables sur le même intervalle I .

fonction $f(x)$	dérivée $f'(x)$
somme $u+v$	$u'+v'$
différence $u-v$	$u'-v'$
produit avec un réel $k\,u$	$k\,u'$
produit $u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
inverse $\frac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\frac{-v'}{v^2}$
quotient $\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$
puissance u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
racine $\sqrt{u}$ avec $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

exemples

1) $f(x) = x^7 + \frac{1}{x}$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

On pose $u(x) = x^7$ donc $u'(x) =$

$v(x) = \frac{1}{x}$ donc $v'(x) =$

Donc $f'(x) =$

2) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \sqrt{x}$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

On pose $u(x) = \frac{1}{x^3}$ donc $u'(x) =$

$v(x) = \sqrt{x}$ donc $v'(x) =$

Donc $f'(x) =$

3) $f(x)=3x^4$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=$

4) $f(x)=(x^2+1)(2x+3)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x)=x^2+1$ donc $u'(x)=$

$v(x)=2x+3$ donc $v'(x)=$

Donc $f'(x)=$

5) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2+4}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $v(x)=3x^2+4$ donc $v'(x)=$

Donc $f'(x)=$

6) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-4}$ définie et dérivable sur $]2;+\infty[$.

On pose $u(x)=2x-3$ donc $u'(x)=$

$v(x)=x^2-4$ donc $v'(x)=$

Donc $f'(x)=$

7) $f(x)=(3x^2+1)^5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x)=3x^2+1$ donc $u'(x)=$

$n=$

Donc $f'(x)=$

8) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x)=4x^2+1$ donc $u'(x)=$

Donc $f'(x)=$

5. Sens de variation

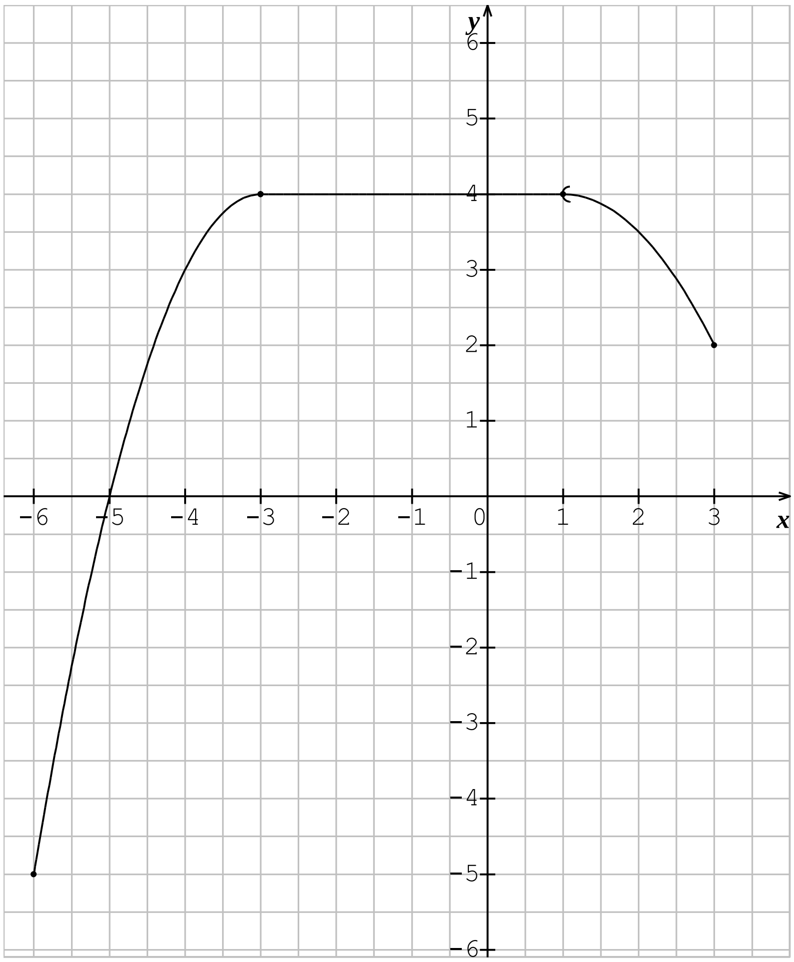
Soit une fonction f dérivable sur l'intervalle I .

f est **strictement croissante** sur l'intervalle I si et seulement pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$.

f est **strictement décroissante** sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$.

f est **constante** sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

exemple



La fonction f est définie sur l'intervalle

f est strictement croissante sur donc $f'(x) > 0$ pour $x \in$

f est strictement décroissante sur donc $f'(x) < 0$ pour $x \in$

f est constante sur donc $f'(x) = 0$ pour $x \in$

6. Maximum et minimum

Soit une fonction f dérivable sur l'intervalle I .
Soit a un réel quelconque de l'intervalle I mais différents des bornes de l'intervalle I .

Si f admet un extremum local en $x=a$, alors $f'(a)=0$.
Si $f'(a)=0$ et si $f'(x)$ change de signe en $x=a$, alors f admet un extremum local en $x=a$.

exemple

Soit f définie sur $[-2;4]$ par $f(x)=-x^3+3x^2+2$.

1) Calculer la dérivée $f'(x)$.

2) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2;4]$.

3) Etablir le tableau des variations de f sur $[-2;4]$.

4) Préciser les extremums locaux.

7. Equation d'une tangente

Soit $f(x) = x^2 - 2x - 5$ définie sur $\mathbb{R}$.
On cherche l'équation de T tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$.

- On calcule la dérivées de f : $f'(x) =$

- Pour $x = 3$,on a $f(3) =$ et $f'(3) =$

- La tangente T admet une équation de la forme $y = mx + p$.

Le coefficient directeur est $m = f'(3) =$
On sait que le point de coordonnées $(3;-2)$ est un point de la tangente, donc
$-2 = 4 \times 3 + p \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 12 + p \quad \Leftrightarrow \quad -14 = p$

- L'équation de T est donc $y = 4x - 14$.